241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

On considère des fonctions de ?? dans C

I) Types de convergence [MTW]

1) Suites de fonctions

a) Cv simple

Déf : cv simple [MTW 438]

Ex : [MTW 408]

Question : de quelles pptés hérite la limite ?

Ex : la continuité n'est pas transmise

Ex : le caractère borné non plus

Prop : la positivité, la croissance et la convexité sont conservés.

b) Cv uniforme

Déf : cv uniforme [MTW 439]

Ex : [MTW 440]

Cv unif => cv simple

La cv simple n'entraine pas la cv uniforme (c-ex)

Critère de Cauchy uniforme (utile quand on ne connait pas la limite)

2) Séries de fonctions

Déf : cv absolue

Déf : on dit que la série cv simplement (resp unif) si la suite des sommes partielles cv simpl (resp unif)

Critère de Cauchy version séries

Déf : cv normale

Th : normalement cv => unif cv

Résumé : schéma des cv

Exemples, c-ex : [MTW]

Th : règle d'Abel

Ex :

3) Théorèmes assurant la cv uniforme

Th Dini

Equicontinuité

II) Propriétés de la limite [MTW]

1) Limite d'une suite de fonctions

Continuité

Intégrabilité sur un compact

Intégrabilité n'importe où (TCD)

Dérivabilité

Th : si fn est une suite de fcts dérivables de [0,1] dans un banach E, que fn' cv unif vers g sur [0,1], et qu'il existe un x_0 tq fn(x_0) cv alors fn cv unif vers une fct f tq f'=g [Gou]

Appl : construction d'une fct dérivable à dérivée discontinue sur un ensemble dense [Gou]

2) Limite d'une somme de série

Intégration terme à terme etc

III) Approximation par des suites et séries de fonctions

1) Théorème de Weierstrass

Théorème

Applications

2) Séries de Fourier [Gou]

Pour f L^2 on définit cn(f), Sn(f).

Th : Fejer

Csq : ZQ

IV) Suites et séries de fonctions holomorphes/méromorphes [Marco L3]

Th : si une suite f_n de fcts holomorphes cv unif sur tout compact alors la limite est holomorphe. De plus, fn' tend vers f' [la limite est clairement continue *(pour l'holomorphie, il faut montrer que l'intégrale de f sur tout triangle est nulle (th de Morera). On regarde la différence de l'int de f sur un triangle et celle des fn sur le même triangle et ça tend vers 0 donc f est holo. On utilise les inégalités de Cauchy à f'-fn' pour montrer que fn' tend vers f')*

Corollaire : si fn cv vers f sur tout compact, ça vaut aussi pour les dérivées k-ièmes

Prop : si fn holo et sans zéros et cv unif vers f alors f a pas de zéros *(par l'abs on suppose que f a un zéro, par th des zéros isolés, il existe un disque autour de ce zéro où c'est le seul, on applique le puissant théorème de l'indice sur ce cercle (découle du th des résidus))*

Séries de fcts holomorphes : si cv unif sur tout compact, somme holomorphe et on peut dériver terme à terme

Séries de fct méromorphes : on dit qu'une série de fcts méro est unif conv sur tout compact si pour tout compact K, à partir d'un certain rang, les f_n n'ont plus de pôles sur K

Th : si une série de fct méro cv unif sur tout compact, la réunion des pôles est un ensemble fermé et discret, l'ordre de chaque pôle est plus petit que le max des orfres de ce pôle pour chaque fn, la série cv absolument, la somme est méromorphe, et on dérive terme à terme

Ex : Tauvel

Développements :
1 - Fonction à dérivée discontinue sur un ensemble dense [Gou An 233] (***)
2 - Fejér [Gou An 286] (***)
Glivenko Cantelli [Nourd 109] (**)
Prolongement de Gamma [BMP 82] + [ZQ 313] (**)
Lévy + TCL [ZQ] (**)
RFK [HL] (**)
Polynômes de Bernstein [ZQ] (**)

Rapport du jury : le jury s'étonne que des candidats considèrent des suites de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie. Cela entraîne des questions sur la nécessité de l'hypothèse de complétude. D'autre part les candidats ont-ils déjà manipulé beaucoup de séries de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension infinie ?

Commentaires :
- escalier du diable
- RFK

Bibliographie :
[MTW] Analyse L2
[Marco – Analyse L3]
[Gou] Analyse
[Tau] Tauvel – analyse complexe